**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

# Algebra n.1

**Anno Accademico 2015/16**

**Appello del 29 gennaio 2016**

1. Siano date, in $S_{15}$, le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)(11,12)(13,14)$$
$$\tau = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)(11,12,13,14,15)$$

   (a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

   (b) Determinare un sottogruppo ciclico *H* di $S_{15}$ tale che $\langle\sigma\rangle$ sia strettamente contenuto in *H*.

   (c) Provare che non esiste un sottogruppo ciclico di $S_{15}$ in cui $\langle\tau\rangle$ sia strettamente contenuto.

2. Sia *n* un intero, e sia $N = n^5 - 100n^4 - 10n^3 + 1000n^2 + 9n - 900$.

   (a) Determinare tutti i valori di *n* per i quali *N* è divisibile per 9.

   (b) Determinare tutti i valori di *n* **pari** per i quali *N* è divisibile per 404.

3. Sia *p* un numero primo positivo, e sia $f(x) = (x^{p-1} - 1)^{2p} + x^2 - 145x + 144 \in \mathbb{Z}[x]$.

   (a) Determinare tutti i valori di *p* per i quali la riduzione di $f(x)$ ha una radice multipla in $\mathbb{Z}_p$.

   (b) Per $p = 2$ determinare una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$.