CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2015/16

<u>Appello del 15 gennaio 2016</u>

1. Data, in S_{18}, la permutazione

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7)(8,9,10,11,12,13)(14,15,16,17,18),$$

sia $G = \langle \sigma \rangle$.

   (a) Detto H l'insieme degli elementi di G aventi periodo dispari, determinare la cardinalità di H e dire se H è un sottogruppo di G.
   (b) Determinare un sottogruppo ciclico K di S_{18} avente ordine 9 e tale che $G \cap K$ non sia il sottogruppo banale.

2. Si consideri la congruenza $x^7 - x^5 \equiv 0 \pmod{404}$.

   (a) Determinare tutte le sue soluzioni pari.
   (b) Un noto teorema afferma che, se *n, m* sono interi positivi coprimi, allora esistono infiniti interi *k* per i quali il numero $nk + m$ è primo. Dedurne che la congruenza ha, tra le sue soluzioni, infiniti numeri primi.

3. Sia $f(x) = x^6 + 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 6x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$.

   (a) Scrivere una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$.
   (b) Determinare due diversi numeri primi positivi *p* tali che la riduzione di $f(x)$ modulo *p* si decomponga in $\mathbb{Z}_p[x]$ nel prodotto di fattori lineari.