CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2014/15

<u>Appello del 23 settembre 2015</u>

1. Siano date, in S_{16}, le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)(10,11)(12,13)(14,15)$$
$$\tau = (1,5,9,4,8,3,7,2,6)(10,11,12,13,14)(15,16).$$

   (a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

   (b) Determinare un sottogruppo H di S_{16} avente ordine 18 e tale che i gruppi $H \cap \langle\sigma\rangle$ e $H \cap \langle\tau\rangle$ non siano banali.

2. Sia m un intero maggiore di 1. Si consideri l'applicazione $\varphi_m : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{101} \times \mathbb{Z}_{25}$ definita ponendo, per ogni $a \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi_m([a]_m) = ([ma]_{101}, [ma]_{25}).$$

   (a) Determinare tutti i valori di m per i quali φ_m è ben definita.

   (b) Determinare tutti i valori di m per i quali φ_m è un omomorfismo di anelli.

   (c) Provare che, per ogni valore di m, $\varphi_m^{-1}([0]_{101}, [4]_{25}) = \varnothing$.

3. Sia $p > 0$ un numero primo. Si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p(p+1)} + x^p$$
$$g(x) = x^{2p} + \overline{2}x^p + \overline{1}.$$

   (a) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.

   (b) Provare che, per ogni p, il polinomio $f(x) - \overline{10302}$ ha una radice in $\mathbb{Z}_p$.