CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2014/15

<u>Appello del 5 giugno 2015</u>

1. Siano date in S_{15} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7,8,9)(10,11,12)(13,14)$$
$$\tau = (1,3)(2,4)(5,6,7,8,9)(10,12,11)(13,14,15)$$

(a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

(b) Determinare interi n e m tali che $\langle \sigma^n \rangle \cap \langle \tau^m \rangle$ sia un gruppo di ordine primo.

2. Sia $\varphi : \mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{210}$ l'applicazione definita ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi([a]_{21}, [b]_{10}) = [10a + 21b]_{210}.$$

(a) Provare che φ è un isomorfismo di gruppi ben definito.

(b) Determinare $\varphi^{-1}([3]_{210})$.

(c) Determinare l'inversa di φ.

3. Dato il numero primo $p > 0$, si considerino le riduzioni modulo p dei seguenti polinomi a coefficienti interi:

$$f(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + x^p + 1,$$
$$g(x) = 3x^2 + 4x + 1.$$

(a) Determinare tutti i valori di p per i quali tali riduzioni sono polinomi coprimi in $\mathbb{Z}_p[x]$.

(b) Per $p = 2$, determinare un massimo comune divisore di tali riduzioni in $\mathbb{Z}_2[x]$.