CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2014/15

<u>Appello del 16 febbraio 2015</u>

1. Sia data in S_{10} la seguente permutazione:

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6).$$

   (a) Determinare un sottogruppo ciclico H di A_{10} che contenga strettamente $\langle \sigma \rangle$.
   (b) Determinare un sottogruppo commutativo, e non ciclico, di A_{10} che contenga $\langle \sigma \rangle$.
   (c) Determinare un sottogruppo proprio e non commutativo di S_{10} che contenga $\langle \sigma \rangle$.

2. Sia p un numero primo maggiore di 3. Provare che esiste un intero m maggiore di 1 e non primo tale che

$$p^{\varphi(m)} \equiv p \pmod{m}.$$

3. Dato il numero primo $p > 2$, si consideri il polinomio

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - p \in \mathbb{Z}[x].$$

   (a) Dimostrare che $f(x)$ non ha radici intere.
   (b) Dire se $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.
   (c) Per $p = 17$, determinare una fattorizzazione in $\mathbb{Z}_3[x]$ della riduzione di $f(x)$ modulo 3.