CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2013/14

<u>Appello del 4 novembre 2014</u>

1. Si considerino le seguenti due permutazioni di S_{10} :

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7,8,9,10),$$
$$\tau = (1,2,3,4,5)(6,7)(8,9,10),$$

   (a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

   (b) Determinare un sottogruppo commutativo H di S_{10} tale che $H \cap \langle\sigma\rangle$ e $H \cap \langle\tau\rangle$ non siano il sottogruppo banale.

   (c) Determinare un sottogruppo proprio e non commutativo K di S_{10} tale che $K \cap \langle\sigma\rangle$ e $K \cap \langle\tau\rangle$ non siano il sottogruppo banale.

2. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : A \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

tale che, per ogni $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (ad - bc, a, b).$$

   (a) Dire se l'applicazione φ è surgettiva.

   (b) Determinare un sottoanello B di A tale che la restrizione di φ a B sia un omomorfismo di anelli non nullo.

3. Sia

$$f(x) = x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x].$$

   (a) Dire se il gruppo $\mathbb{Z}_2[x] \big/ (x^2 + x + \overline{1})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

   (b) Dire se l'anello $\mathbb{Z}_2[x] \big/ (x^2 + x + \overline{1})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.