CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2013/14

Appello del 24 settembre 2014

1. Si considerino le seguenti due permutazioni di S_{13}:

$$\sigma = (1,2)(3,4,5)(6,7,8,9,10)(11,12),$$
$$\tau = (1,2,3,4)(5,6,7,8)(9,10)(11,12,13),$$

   (a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

   (b) Determinare un sottogruppo proprio non commutativo H di S_{13} tale che $\sigma \in H$.

2. Sia $\lambda \in \mathbb{Z}$. Si consideri l'applicazione

$$\varphi_\lambda : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$$

   tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi_\lambda([a]_4, [b]_5) = ([a]_2, [\lambda b]_{10})$$

   (a) Determinare tutti gli interi λ per i quali φ_λ è ben definita.

   (b) Determinare il più piccolo intero positivo λ per il quale φ_λ è un omomorfismo di anelli.

   (c) Dire se esiste un intero λ tale che φ_λ sia un isomorfismo di gruppi.

3. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^7 + 2x^6 + 10x^4 + 20x^3 + 25x + 50 \in \mathbb{Z}[x].$$

   (a) Determinare una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$.

   (b) Determinare una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{C}[x]$.