CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2013/14

Appello del 18 giugno 2014

1. Sia n un intero positivo e sia

$$M_n = \{\sigma \in S_7 \mid n \text{ divide } o(\sigma)\}.$$

(a) Determinare $|M_4|$.
(b) Dire per quali n si ha $M_4 \cap M_n \neq \emptyset$.
(c) Determinare due interi positivi h e k tali che $M_4 \subset M_h \subset M_k$, ove le inclusioni sono strette.

2. Sia $\alpha \in \mathbb{Z}_3$. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_3[x] \big/ (x^4 + \overline{1}) \to \mathbb{Z}_3[x] \big/ (x^2 + \alpha x + \overline{2})$$

tale che, per ogni $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$,

$$\varphi([f(x)]_{x^4+\overline{1}}) = [f(x)]_{x^2+\alpha x+\overline{2}}.$$

(a) Dire per quali α l'applicazione φ è ben definita.
(b) Per tali α determinare $\left|\varphi^{-1}([\overline{0}]_{x^2+\alpha x+\overline{2}})\right|$.

3. Sia p un numero primo positivo. Sia $f(x) = x^{p^2-1} + px + p^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) Provare che, per ogni p, $f(x)$ è privo di radici razionali.
(b) Trovare un primo positivo p tale che la riduzione di $f(x)$ modulo p sia riducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$ e determinare una sua decomposizione in fattori irriducibili.