**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

# Algebra n.1

**Anno Accademico 2013/14**

**Appello del 10 febbraio 2014**

1, Sia $n$ un intero positivo e sia

$$H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ ha periodo dispari}\}.$$

(a) Determinare tutti gli $n$ per i quali $H$ è un sottogruppo di $S_n$.

(b) Per $n = 8$, determinare la cardinalità di $H$.

(c) Per $n = 8$, determinare due distinti sottogruppi non ciclici di $S_8$ contenuti in $H$.

2.

(a) Provare che per nessun intero positivo $n$, il numero $2n^{4^n} + n^{3^n} + 6$ è divisibile per 10.

(b) Provare che esistono infiniti interi positivi $n$ per i quali $n^n + 1$ è divisibile per 5.

3.

(a) Sapendo che esistono infiniti numeri primi $p$ tali che $p \equiv 3 \pmod 4$, provare che esistono infiniti numeri primi $p$ per i quali la riduzione modulo $p$ del polinomio $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.

(b) Determinare un numero primo $p$ in modo che la riduzione modulo $p$ del polinomio $f(x) = x^4 + 1790181x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ sia riducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$, ma priva di radici in $\mathbb{Z}_p$.