CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2013/14

<u>Appello del 27 gennaio 2014</u>

1,

(a) Determinare il numero delle permutazioni $\sigma \in S_5$ tali che $\sigma^4(1) = 2$.

(b) Dimostrare che, per ogni intero n non divisibile per 5, esiste un 5-ciclo $\sigma \in S_5$ tale che $\sigma^n(1) = 2$.

2. Siano s, t numeri interi, e sia n un intero maggiore si 1. Si consideri l'applicazione

$$\varphi_n : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_n$$

tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_4, [b]_5) = [sa + tb]_n$.

(a) Dire per quali s,t l'applicazione φ_7 è ben definita.

(b) Dire quante sono le applicazioni φ_5 ben definite e surgettive.

(c) Dire per quali s,t l'applicazione φ_5 è un omomorfismo di anelli.

3. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^{202} + 1010x + 177 \in \mathbb{Z}[x].$$

(a) Trovare un primo p tale che la riduzione di $f(x)$ modulo p si decomponga in $\mathbb{Z}_p[x]$ nel prodotto di fattori lineari.

(b) Trovare un primo p tale che la riduzione di $f(x)$ modulo p non abbia radici in $\mathbb{Z}_p$.