CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2012/13

<u>Appello del 24 settembre 2013</u>

1. Sia $H=\{\sigma\in S_7 \mid \exists\, n$ intero dispari tale che $\sigma^n(1)=1\}$.

   (a) Determinare la cardinalità dell'insieme *H*.
   (b) Trovare due sottogruppi non banali di S_7 che siano contenuti in *H* e la cui intersezione sia il sottogruppo banale.

2. Per ogni coppia di interi (h,k) si consideri l'applicazione

$$\varphi:\mathbb{Z}_{77}\to\mathbb{Z}_{22}\times\mathbb{Z}_{14}$$

   tale che, per ogni $a\in\mathbb{Z}$,

$$\varphi\left([a]_{77}\right)=([ha]_{22},[ka]_{14}).$$

   (a) Determinare tutte le coppie di interi (h,k) per le quali φ è un'applicazione ben definita.
   (b) Determinare tutte le coppie di interi (h,k) per le quali φ è un omomorfismo di anelli.
   (c) Determinare una coppia di interi (h,k) per la quale φ è un omomorfismo di gruppi non nullo e non iniettivo.

3. Sia *p* un numero primo positivo. Sia

$$f(x)=x^{p^2+p}-x^{p^2+1}-x^{2p}+x^{p+1}+x^p-x\in\mathbb{Z}_p[x].$$

   (a) Provare che il polinomio $f(x)$ non possiede radici multiple in $\mathbb{Z}_p$.
   (b) Per $p=3$, determinare una decomposizione di $f(x)$ in fattori irriducibili.