CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2012/13

<u>Appello del 10 settembre 2013</u>

1. Sia $H = \{\sigma \in S_5 \,|\, \sigma(1) \neq 5\}$.

   (a) Determinare la cardinalità dell'insieme *H*.
   (b) Trovare un sottogruppo non ciclico di S_5 contenuto in *H*.
   (c) Provare che *H* contiene almeno 3 sottogruppi di S_5 aventi ordine 6.

2. Dato un intero n maggiore di 1, si consideri l'anello prodotto diretto $A = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, e si definisca l'applicazione

$$\varphi : A \to \mathbb{Z}_n$$

   ponendo, per ogni $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_n$,

$$\varphi\big((\alpha, \beta, \gamma, \delta)\big) = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

   (a) Determinare un sottoanello non nullo *B* di A in modo tale che la restrizione di φ a *B* sia un omomorfismo di anelli (provare che l'insieme *B* trovato è un sottoanello di *A*).
   (b) Per $n = 3$, determinare la cardinalità di $\varphi^{-1}\big([1]_3\big)$.

3.

   (a) Provare che il polinomio $x^{20} - x^{19} - x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_{401}[x]$ ha in $\mathbb{Z}_{401}$ una sola radice.
   (b) Determinare un numero intero positivo m in modo tale che il polinomio $x^{m+400} - x^{400} - x^{m+1} + x^m + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_{401}[x]$ sia privo di radici in $\mathbb{Z}_{401}$.