CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2012/13

<u>Appello del 18 giugno 2013</u>

1. Sia H il *centralizzante* della permutazione $\alpha = (1,2,3)(4,5,6,7,8)$ in A_{11}, ossia l'insieme degli elementi di A_{11} che commutano con α.

   (a) Provare che H è un sottogruppo di A_{11}.
   (b) Dire se H è ciclico.

2. Sia $f(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ un polinomio non costante. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_7[x]\big/(f(x)) \to \mathbb{Z}_{56}$$

definita nel modo seguente: per ogni polinomio $a[x] \in \mathbb{Z}_7[x]$, tale che

$$a(x) = \sum_{i=0}^{n} [a_i]_7 x^i \qquad \text{(con } n \in \mathbb{N}, \text{ ed } a_i \in \mathbb{Z}, \text{ per ogni } i\text{)},$$

si pone $\varphi([a(x)]) = [8a_0]_{56}$.

   (a) Determinare l'insieme dei polinomi $f(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ per i quali φ è un omomorfismo di anelli ben definito.
   (b) Determinare l'insieme dei polinomi $f(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ per i quali φ è un monomorfismo di anelli, precisandone la cardinalità.
   (c) Nel caso in cui $f(x) = x^3 + x^2 + x$, determinare il nucleo di φ, precisandone la cardinalità.

3. Sia $f(x) = x^8 + 2x^7 + 6x^6 - x^2 - 2x - 6 \in \mathbb{R}[x]$.

   (a) Determinare, in $\mathbb{C}[x]$, una decomposizione di $f(x)$ in fattori irriducibili.
   (b) Determinare un intero positivo n in modo tale che l'equazione

$$x^8 + [2]_n x^7 + [6]_n x^6 - x^2 - [2]_n x - [6]_n = [0]_n$$

abbia in $\mathbb{Z}_n$ almeno 7 soluzioni distinte.