CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2012/13

Appello del 4 giugno 2013

1. Si considerino le seguenti permutazioni di S_{12} :

$$\alpha = (1,2,3)$$
$$\beta = (4,5,6,7,8)$$

Inoltre sia γ una permutazione di A_{12} avente periodo 4. Infine, sia H un sottogruppo di A_{12} al quale appartengono α, β, γ.

(a) Provare che H non è ciclico.

(b) Dire se H può essere abeliano.

2. Determinare l'insieme dei numeri interi n tali che 12 divide il numero

(a) $1+\sum_{i=1}^{11} n^i$

(b) $5+\sum_{i=1}^{11} n^i$

3.

(a) Provare che il polinomio

$$f(x) = x^{1002} + 75x^{1001} + 42x^{1000} - 36x^{999} + 17x^{202} + 31x^{201} - 10x^{11} + 9x^2 + 21x + 210 \in \mathbb{Z}[x]$$

non ha radici intere di molteplicità maggiore di uno.

(b) Sia p un intero positivo primo. Determinare una fattorizzazione del polinomio $g(x) = x^{2p} + [4]_p x^p + [4]_p$ in $\mathbb{Z}_p[x]$.

(c) Determinare un numero intero a tale che, per ogni primo $p > 2$, il polinomio $h(x) = x^{2p} + [4]_p x^p + [a]_p$ abbia in $\mathbb{Z}_p$ due radici distinte.