**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

# Algebra n.1

**Anno Accademico 2012/13**

**<u>Appello del 15 aprile 2013</u>**

1. Date le permutazioni

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15\\3&11&9&14&4&6&8&2&1&12&15&13&5&10&7\end{pmatrix}\in S_{15},$$

$$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15\\7&5&6&8&12&4&1&9&15&2&13&3&11&14&10\end{pmatrix}\in S_{15},$$

siano $H_1=\langle\sigma^3\rangle, H_2=\langle\tau^4\rangle$. Determinare $H_1\cap H_2$.

2. Siano $A=\left\{a+bi\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ e $B=\left\{a+bi\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Q}\right\}$.

   (a) Provare che $A$ è un sottoanello unitario di $\mathbb{C}$.
   (b) Dire se il numero $1-i\sqrt{2}$ è invertibile in $A$, ed in caso affermativo determinare il suo inverso.
   (c) Data l'applicazione $\varphi: A\to\mathbb{Z}_3$, definita ponendo $\varphi(a+bi\sqrt{2})=[a+b]_3$ per ogni $a,b\in\mathbb{Z}$, dire se $\varphi$ è un omomorfismo di anelli.
   (d) Dire se $B$ è un campo.

3. Sia $f(x)=x^4+108x^3+449x^2+532x+116\in\mathbb{Z}[x]$.

   (a) Scrivere una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$.
   (b) Detta $\overline{f}(x)\in\mathbb{Z}_3[x]$ la riduzione modulo 3 di $f(x)$, determinare una sua fattorizzazione in $\mathbb{Z}_3[x]$.