CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2012/13

<u>Appello del 28 gennaio 2013</u>

1. Siano $\alpha, \beta \in S_{12}$, ove α ha struttura ciclica $(6,4,2)$ e β ha periodo 18.

   (a) Provare che $\langle\alpha\rangle \cap \langle\beta\rangle = \{id\}$.

   (b) Provare che nessun sottogruppo ciclico di S_{12} contiene $\langle\alpha\rangle \cup \langle\beta\rangle$.

2. Sia n un intero maggiore di 1. Sia $\varphi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_n$ l'applicazione tale che, per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi([x]_4, [y]_{10}) = [2x + 6y]_n$$

   (a) Determinare tutti gli n per i quali φ è ben definita.

   (b) Trovare tutti gli n per i quali φ è un omomorfismo di anelli.

3. Sia a un numero intero e sia p un primo positivo. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^p + x + [a]_p \in \mathbb{Z}_p[x].$$

   (a) Dire per quali a e p il polinomio $f(x)$ ammette almeno una radice in $\mathbb{Z}_p$.

   (b) Dire per quali a e p tale radice è unica.

   (c) Nel caso in cui $p = 101$ ed $a = 270$, determinare tutte le radici di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_{101}$.