CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2011/12

<u>Appello del 14 gennaio 2013</u>

1. Si consideri la seguente permutazione di S_{13}:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 5 & 13 & 6 & 8 & 11 & 7 & 2 & 1 & 9 & 4 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare la decomposizione in cicli disgiunti di

$$\alpha^{2^{17054328986}}$$

   (b) Provare che in S_{13} esistono almeno 90 elementi che commutano con α.

2. Sia data l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$$

tale che, per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi([x]_4, [y]_6) = ([x]_2, [4y]_{12})$$

   (a) Provare che φ è ben definita ed è un omomorfismo di anelli.
   (b) Determinare l'immagine di φ.
   (c) Determinare il nucleo di φ e dire se è un sottogruppo ciclico di $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

3. Sia p un numero primo positivo. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^p - (p-1)x^{p-1} - x + (p-1)^p \in \mathbb{Z}[x].$$

   (a) Provare che la riduzione di $f(x)$ modulo p ha in $\mathbb{Z}_p$ esattamente una radice di molteplicità 2, mentre le altre radici sono tutte semplici.
   (b) Nel caso in cui $p = 101$, si determini la fattorizzazione in $\mathbb{Z}_{101}[x]$ della riduzione di $f(x)$ modulo 101.