CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2011/12

<u>Appello del 26 settembre 2012</u>

1. Si considerino le seguenti permutazioni di S_{17} :

$$\alpha = (1,16,7,11,17,15)(3,10,9,6)(12,4,8,13,14,5,2)$$
$$\beta = (1,10,7,3)(2,9,6,14)(17,8,13)(4,11,12,5,16,15)$$

(a) Sia H un sottogruppo di S_{17} al quale appartengono α e β. Determinare, in H, due permutazioni distinte che inviano 1 in 3.

(b) Determinare un sottogruppo abeliano K di S_{17} tale che le intersezioni $K \cap \langle \alpha \rangle$ e $K \cap \langle \beta \rangle$ non siano il sottogruppo banale.

2.

(a) Sia n un intero positivo. Provare che l'equazione $\overline{453}x^{2n} + \overline{11}x^n + \overline{987} = \overline{0}$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}_{9216}$ (qui il soprassegno indica la classe di congruenza modulo 9216).

(b) Determinare l'insieme delle radici ottave di $[1]_{560}$ in $\mathbb{Z}_{560}$.

(c) Sia G un gruppo moltiplicativo ciclico il cui ordine s è pari. Sia 1 il suo elemento neutro. Provare che, in G, l'equazione $x^2 = 1$ ha più di una soluzione.

3. Sia a un numero intero. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^4 + 51741x^3 + 81213x^2 + 91197x + a \in \mathbb{Z}[x].$$

(a) Provare che $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ per ogni $a \in \{1,3,5,6,7,9\}$.
(b) Determinare un numero primo p tale che, per ogni intero a, la riduzione di $f(x)$ modulo p sia riducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$.