CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2011/12

Appello del 12 settembre 2012

1. Si consideri la seguente permutazione di S_{16}:

$$\alpha = (1,7,2,13)(3,14,6,10,4)(8,12)(5,11)(9,16,15)$$

(a) Determinare tutti gli elementi dell'insieme

$$H = \left\{ \sigma \in \langle \alpha \rangle \,\middle|\, \sigma^2(1) = 2 \ \text{ e } \ \sigma^3(3) = 4 \right\}.$$

(b) Determinare un sottogruppo K di $\langle \alpha \rangle$ avente ordine 3 e provare che ogni sottogruppo di S_{16} contenente $H \cup K$ contiene anche $\langle \alpha \rangle$.

2.

(a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $x^3 = x$ in $\mathbb{Z}_{303}$.

(b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $x^3 = x$ in $\mathbb{Z}_{404}$.

3. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^4 + 8270 \cdot 14876^{100} x^3 + 15413^{798543} x + 2 \cdot (27584)^{81} \in \mathbb{Z}[x].$$

(a) Provare che la riduzione modulo 3 di $f(x)$ si decompone in $\mathbb{Z}_3[x]$ nel prodotto di fattori lineari.

(b) Determinare una fattorizzazione in $\mathbb{Z}_5[x]$ della riduzione di $f(x)$ modulo 5.

(c) Provare che $f(x)$ non ha radici intere divisibili per 6.