

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2011/12

Appello del 5 giugno 2012

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{12} :

$$\begin{aligned}\sigma &= (1,3,12,7)(8,5,6,2,11)(10,4,9), \\ \tau &= (1,5)(6,8,11)(12,3,2,7)(4,9,10).\end{aligned}$$

Sia H un sottogruppo di S_{12} contenente $\{\sigma, \tau\}$.

- (a) Provare che ad H appartiene un elemento di periodo 6.
- (b) Provare che $|H| \geq 120$.

2. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a \equiv d \pmod{2}, b \equiv c \pmod{2} \right\}$.

- (a) Provare che A è un sottoanello unitario di $M_2(\mathbb{Z})$.
- (b) Dire se A è un anello commutativo.
- (c) Dire se l'applicazione $\varphi: A \rightarrow \mathbb{Z}_2$ definita da

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = [a^2 + b^2]_2$$

è un omomorfismo di anelli.

3.

- (a) Determinare una fattorizzazione del polinomio $x^{13} - x^{10} - x^3 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_{11}[x]$.
- (b) Provare che il numero delle radici in \mathbb{Z}_{11} del polinomio $x^{42} + \bar{10}x^{41} + \bar{3}x^{28} + \bar{8}x^{27} + \bar{8}x^4 + \bar{3}x^3 \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ è pari.