CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2011/12

Appello del 15 febbraio 2012

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{14} :

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7,8,9)(10,11)(12,13,14)$$
$$\tau = (1,10,3,2)(7,6,9,8,5)(4,11)(12,14,13).$$

   (a) Determinare tutti i numeri interi k tali che $\langle \sigma^k \rangle \cap \langle \tau \rangle$ non sia il sottogruppo banale di S_{14}.

   (b) Provare che, se K è un sottogruppo di S_{14} contenente $\{\sigma, \tau\}$, allora K contiene tre sottogruppi di ordine 5.

2. Per ogni numero intero n, sia $A(n) = n^9 + 2n^7 + 3n^3 + 4n$.

   (a) Determinare tutti gli interi n per i quali $A(n)$ è divisibile per 7.

   (b) Determinare tutti gli interi n per i quali $A(n)$ non è divisibile per 30.

3. Dati $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$, siano

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx + \overline{3} \in \mathbb{Z}_5[x],$$
$$g(x) = x^2 + c \in \mathbb{Z}_5[x].$$

   (a) Provare che $g(x)$ non divide $f(x)$.

   (b) Provare che se $\overline{2}$ è radice di $f(x)$, allora $\overline{3}$ non è radice di $f(x)$.

   (c) Nell'ipotesi in cui $a \neq \overline{0}$ e $b = \overline{0}$, provare che $f(x)$ ha una sola radice in $\mathbb{Z}_5$ e determinare una fattorizzazione di $f(x)$. (Si richiede di fornirne l'espressione generale).