CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2011/12

Appello del 1° febbraio 2012

1. Siano date le seguenti permutazioni di $S_6 : \sigma = (1,2,3),\ \tau = (4,5,6)$.
   (a) Determinare un sottogruppo ciclico H di S_6 in modo che H contenga strettamente $\langle \sigma\tau \rangle$.
   (b) Determinare un sottogruppo K di S_6 contenente $\{\sigma, \tau\}$ ed avente ordine 9.
   (c) Provare che il sottogruppo K non è ciclico.

2. Siano a, b interi, e siano n, m interi maggiori di 1. Si consideri l'applicazione

$$\varphi_{n,m}^{a,b} : \mathbb{Z}_{nm} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$$

   tale che, per ogni $x \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{n,m}^{a,b}([x]_{nm}) = ([ax]_n, [bx]_m)$.

   (a) Determinare tutti gli interi a,b per i quali $\varphi_{14,15}^{a,b}(\mathbb{Z}_{210})$ ha cardinalità 10.
   (b) Determinare tutti gli interi a,b per i quali $\varphi_{2,3}^{a,b}$ è un omomorfismo di anelli.
   (c) Determinare $\left(\varphi_{3,14}^{2,35}\right)^{-1}([1]_3, [1]_{14})$.

3. Dire se il polinomio

$$f(x) = 2x^5 - 180x^4 + 2 \cdot 31^{31} x^3 + 1086542x^2 + 2 \cdot 101^{100} \cdot 47^{48} x + 34 \in \mathbb{Z}[x]$$

è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.