

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2011/12

Appello del 18 gennaio 2012

1. Siano dati i seguenti elementi di S_{16} :

$$\sigma = (1, 7, 13, 9, 2)(3, 8, 4)(5, 11, 12, 6, 10, 15, 14, 16)$$

$$\tau = (14, 10, 12, 5)(8, 4, 3)(15, 6, 11, 16).$$

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
- (b) Determinare, se possibile, un sottogruppo di S_{16} avente ordine 24 e contenente $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

2. Sia n un intero maggiore di 1. Si consideri l'applicazione

$$\varphi_n : \mathbb{Z}_{2n} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$$

tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi_n([a]_{2n}) = ([a]_2, [10a]_n)$.

- (a) Determinare $\varphi_8^{-1}([0]_2, [0]_8)$.
- (b) Determinare tutti i valori di n per i quali φ_n è un isomorfismo di gruppi additivi.
- (c) Determinare tutti i valori di n per i quali φ_n è un isomorfismo di anelli.

3. Sia dato il polinomio $f(x) = x^{3528} + x - 36 \in \mathbb{Z}[x]$.

- (a) Determinare tutte le radici in \mathbb{Z}_{43} della riduzione di $f(x)$ modulo 43.
- (b) Determinare tutte le radici in \mathbb{Z}_7 della riduzione di $f(x)$ modulo 7.