CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2010/11

<u>Appello del 26 settembre 2011</u>

1. Siano date le permutazioni

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18\\12&14&8&10&11&13&4&9&5&7&3&2&6&1&17&18&16&15\end{pmatrix}\in S_{18},$$

$$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18\\15&16&5&7&8&6&10&11&3&4&9&17&13&18&12&14&2&1\end{pmatrix}\in S_{18}.$$

   (a) Posto $H=\langle\sigma\rangle\cap\langle\tau\rangle$, provare che H ha ordine 30.

   (b) Determinare l'insieme $D=\{\alpha\in H\,|\,o(\alpha)\text{ divide }10\}$.

   (c) Dire se D è un sottogruppo di S_{18}.

2. Sia $A=\mathbb{Z}_{707}$.

   (a) Dire se il sottoanello $B=\{[7a]_{707}\,|\,a\in\mathbb{Z}\}$ di A è dotato di identità moltiplicativa, ed in caso affermativo determinarla.

   (b) Nel gruppo delle unità di A determinare un elemento di periodo 12.

3. Sia $f(x)=36x^{101}-x^{100}+36x-1\in\mathbb{Z}[x]$.

   (a) Determinare tutte le radici in $\mathbb{Z}_{101}$ della riduzione di $f(x)$ modulo 101.

   (b) Dire se la riduzione di $f(x)$ modulo 1129 ha radici in $\mathbb{Z}_{1129}$.