CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2010/11

<u>Appello del 12 settembre 2011</u>

1. Siano date le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 3 & 16 & 15 & 11 & 8 & 13 & 10 & 5 & 6 & 1 & 2 & 14 & 9 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix} \in S_{16},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 3 & 7 & 14 & 16 & 12 & 8 & 11 & 5 & 15 & 13 & 10 & 1 & 4 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in S_{16},$$

e sia H un sottogruppo di S_{16} tale che $\{\sigma,\tau\} \subset H$. Provare che H contiene un sottogruppo di ordine 18.

2. Sia $n \in \{5,6\}$. Si consideri l'applicazione

$$\varphi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$$

tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi_n(a) = \left[a^4 - a^2\right]_n$.

   (a) Dire se φ_6 è un omomorfismo di anelli.
   (b) Determinare $\varphi_5(\mathbb{Z})$.
   (c) Dire se φ_5 è un omomorfismo di gruppi.

3. Si considerino gli anelli $A_1 = \mathbb{Z}_3[x] \big/ (x^3 + \overline{2}x + \overline{1})$, $A_2 = \mathbb{Z}_{28}$ e il loro prodotto diretto $A = A_1 \times A_2$.

   (a) Determinare l'ordine del gruppo U delle unità di A.
   (b) Dire se l'elemento $([x+\overline{1}],[5]_{28})$ è invertibile in A, e in caso affermativo determinare il suo inverso.
   (c) Determinare, nel gruppo U, un elemento di periodo 6.