CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2010/11

Appello del 15 giugno 2011

1. Date le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 14 & 9 & 2 & 6 & 3 & 13 & 10 & 7 & 11 & 1 & 12 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in S_{14},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 9 & 5 & 6 & 3 & 13 & 14 & 1 & 11 & 8 & 12 & 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \in S_{14},$$

   (a) determinare la decomposizione in cicli disgiunti di $\left(\sigma^{19031}\tau^{29528}\right)^2$;

   (b) determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

2. Siano a un intero e n un intero maggiore di 1. Sia $A = \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, che è un sottoanello unitario di $\mathbb{C}$. Si consideri l'applicazione

$$\varphi_{a,n} : A \to \mathbb{Z}_n$$

   tale che, per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{a,n}(x+iy) = \left[a(x^2+y^2)\right]_n$.

   (a) Dire se l'applicazione $\varphi_{7129,4}$ è suriettiva.

   (b) Dimostrare che l'applicazione $\varphi_{1,2}$ è un omomorfismo di anelli unitari.

   (c) Dimostrare che il nucleo di $\varphi_{1,2}$ non è un gruppo ciclico.

   (d) Dire per quali interi dispari a e quali interi n maggiori di 1 l'applicazione $\varphi_{a,n}$ è un omomorfismo di anelli.

3. Dire se il polinomio $x^4 + 3^{8414}x^3 + 2^{1320}x^2 + 13645 \cdot 5^{3626}x + 7^{5737} \in \mathbb{Z}[x]$ ha radici razionali.