CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2010/11

<u>Appello del 4 aprile 2011</u>

1. Data la permutazione

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 11 & 12 & 10 & 2 & 5 & 1 & 9 & 13 & 7 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in S_{13},$$

sia $G = \langle \alpha \rangle$.

(a) Posto $H = \{\sigma \in G \mid \sigma^2(1) = 1, \sigma^3(2) = 2\}$, provare che H è un gruppo ciclico e determinarne un generatore.
(b) Determinare due diversi sottogruppi propri non banali di H.

2. Sia $\varphi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$ l'applicazione tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_4, [b]_6) = [9a + 4b]_{12}$.

(a) Provare che φ è ben definita ed è un omomorfismo di anelli.
(b) Determinare il nucleo di φ.
(c) Determinare $\varphi^{-1}([1]_{12})$.

3. Sia $f(x) = 10x^4 + 9x^3 - 11x^2 + 10x - 4 \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) Determinare una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$.
(b) Determinare una fattorizzazione in $\mathbb{Z}_7[x]$ della riduzione di $f(x)$ modulo 7.