CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2010/11

Appello del 7 febbraio 2011

1. Data la permutazione

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 3 & 12 & 18 & 14 & 17 & 10 & 19 & 13 & 6 & 8 & 20 & 5 & 16 & 2 & 7 & 4 & 9 & 15 & 11 & 1 \end{pmatrix} \in S_{20},$$

sia $G = \langle \alpha \rangle$. Posto $H = \{\sigma \in G \mid \sigma^2(1) = 1, \sigma^4(2) = 2\}$, provare che H è un gruppo ciclico e determinarne tutti gli elementi.

2. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a \\ a & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.
   (a) Provare che A è un sottoanello unitario di $M_2(\mathbb{Z})$.
   (b) Provare che l'applicazione $\varphi : A \to \mathbb{Z}_5$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} a+b & a \\ a & b \end{pmatrix} \right) = [3a+b]_5$, è un omomorfismo di anelli.
   (c) Determinare il nucleo di φ.
   (d) È vero che, per ogni $\alpha \in A$, $\varphi(\alpha)$ invertibile in $\mathbb{Z}_5 \Rightarrow \alpha$ invertibile in A?

3. Dati i polinomi

$$f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x],$$
$$g(x) = x^3 + 20x^2 + 11x + 7 \in \mathbb{Z}[x],$$

   (a) determinare MCD($f(x), g(x)$) in $\mathbb{Q}[x]$;
   (b) dette $\overline{f}(x), \overline{g}(x)$ le loro riduzioni modulo 3, determinare MCD($\overline{f}(x), \overline{g}(x)$) in $\mathbb{Z}_3[x]$.