CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2009/10

Appello del 7 luglio 2010

1. Data la permutazione

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 10 & 7 & 5 & 12 & 15 & 13 & 1 & 11 & 6 & 2 & 3 & 9 & 14 & 16 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_{16},$$

   sia $G = \langle \alpha \rangle$, e sia $H = \{\sigma \in G \mid \sigma(\{1,2\}) = \{1,2\}\}$.

   Provare che H è un gruppo ciclico e determinarne l'ordine ed un generatore.

2. Sia n un intero positivo e, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, sia $\varphi_{a,n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ l'applicazione definita ponendo $\varphi_{a,n}(x) = [ax]_n$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$.

   (a) Dire per quali valori di a e n l'applicazione $\varphi_{a,n}$ è suriettiva.
   (b) Dire per quali $a \in \mathbb{Z}$ $\varphi_{a,2}$ è un omomorfismo di anelli.
   (c) Dire per quali $a \in \mathbb{Z}$ $\varphi_{a,303}$ è un omomorfismo di anelli.
   (d) Dire se $\operatorname{Im}\varphi_{9,72}$ è un sottoanello di $\mathbb{Z}_{72}$ dotato di unità.

3. Sia $f(x) = x^5 - x^4 - 4x + 4 \in \mathbb{Z}[x]$.

   (a) Determinare le fattorizzazioni di $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$, in $\mathbb{R}[x]$ e in $\mathbb{C}[x]$.
   (b) Denotata, per un arbitrario numero primo p, con $\overline{f}(x)$ la riduzione di $f(x)$ modulo p, dire per quali p l'elemento $[x+\overline{1}]$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/(\overline{f}(x))$.