CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2025/26

Appello del 3 novembre 2026

1. Si considerino in S_{22} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7,8,9)(10,11,12,13,14)(15,16)(17,18)(19,20,21,22),$$
$$\tau = (1,4,7,2,5,8,3,6,9)(10,13,11,14,12)(15,17)(16,18)(19,21,20,22).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{22}: $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Dire se $C(\sigma) \cap C(\tau)$ è ciclico.
(c) Dire se $C(\sigma)$ è abeliano.

2.

(a) Determinare un omomorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{25}$ a $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{20}$ la cui immagine abbia esattamente 25 elementi.
(b) Determinare un omomorfismo di anelli non nullo da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{48}$.

3. Dato un numero primo p positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} + x^p + x + \overline{1},$$
$$g(x) = x^{(p-1)^3} + x^{2p^2} - \overline{3},$$
$$h(x) = x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x.$$

(a) Dire per quali p $f(x)$ e $g(x)$ hanno radici comuni in $\mathbb{Z}_p$, e determinarle.
(b) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f(x), h(x))$.