CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2025/26

<u>Appello del 29 giugno 2026</u>

1. Si considerino in S_{24} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,7,6,8)(9,10,11,12)(13,14,15,16,17)(19,22,18,21,23,20,24),$$
$$\tau = (1,3)(2,4)(5,7)(6,8)(9,12,11,10)(16,15,14,13,17)(18,19,20,21,22,24,23)$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{24}: $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{24} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Dire se $C(\sigma) \cap C(\tau)$ è ciclico.

2.

(a) Determinare, se possibile, un epimorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_{44} \times \mathbb{Z}_{51}$ a $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{11}$.
(b) Determinare, se possibile, un monomorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_{19} \times \mathbb{Z}_{20}$ a $\mathbb{Z}_{40} \times \mathbb{Z}_{95}$.

3. Dato un numero primo p positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^3-p^2} + x^{2p^2} + x^{p^2-p} + \overline{2}x^{p+1} + x^{2p} + x^{2p-2} + x^4 + \overline{1},$$
$$g(x) = x^{p-1} + x^2,$$
$$h(x) = x^2 + x + \overline{1}.$$

(a) Determinare, al variare di p, il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $g(x)$.
(b) Determinare, al variare di p, le radici comuni a $f(x)$ e $h(x)$.
(c) Determinare, per $p = 1009$, $\mathrm{MCD}(g(x), h(x))$.