CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2025/26

<u>Appello dell'8 giugno 2026</u>

1. Si considerino in S_{23} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,11,10,12)(13,14,15)(16,17,18,19)(20,21,22,23)$$
$$\tau = (1,4,2,3)(5,7)(6,8)(9,12,11,10)(13,15,14)(16,23,19,22,18,21,17,20).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{23}: $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{23} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Dire se $C(\sigma)$ è abeliano.
(c) Dire se $C(\sigma) \subset C(\tau)$ o $C(\sigma) \supset C(\tau)$.

2.

(a) Determinare, se possibile, un omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{27}$ a $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{54}$ il cui nucleo abbia ordine 81.
(b) Dire se esiste un monomorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{25}$ a $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{40}$.

3. Dato un numero primo p positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} + x^{p-1} + x + \overline{1},$$
$$g(x) = x^3 - x,$$
$$h(x) = x^p + x.$$

(a) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.
(b) Determinare, al variare di p, il quoziente e il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $h(x)$.