CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2025/26

Appello del 17 aprile 2026

1. Si considerino in S_{22} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10,11,12)(13,14,15,16)(17,19,21)(18,20,22)$$
$$\tau = (1,3)(2,4)(5,7,6,8)(9,12,11,10)(13,16,15,14)(17,18,19,20,21,22)$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{22}: $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Dire se $C(\sigma) \cap C(\tau)$ è ciclico.
(c) Dire se $C(\sigma)$ è abeliano.

2.

(a) Determinare, se possibile, un omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{28}$ a $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{56}$ la cui immagine abbia ordine 35.
(b) Dire se esiste un epimorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{40}$ a $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{14}$.

3. Dato un numero primo p positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} + x^{p^2-p} + x^p + \overline{1},$$
$$g(x) = x^{p^2} - x^p,$$
$$h(x) = x^2 - x.$$

(a) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.
(b) Determinare, al variare di p, il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $h(x)$.