CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2025/26

<u>Appello del 9 febbraio 2026</u>

1. Si considerino in S_{19} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12,13,14,15)(16,17,18,19),$$
$$\tau = (1,3,2)(4,7,5,8,6,9)(10,12,14)(11,13,15)(16,18,17,19).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{19}: $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{19} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Dire se $C(\sigma) \cap C(\tau)$ è ciclico.

2.

(a) Determinare il numero degli epimorfismi di gruppi da $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{22}$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$.
(b) Determinare, se possibile, un monomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$ a $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{60}$.
(c) Determinare, se possibile, un omomorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{80}$ a $\mathbb{Z}_{40} \times \mathbb{Z}_{60}$ il cui nucleo abbia ordine 12.

3. Dato un numero primo p positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^3} - \overline{2}x^{p^2} + x^p + \overline{1},$$
$$g(x) = x^{2p} - \overline{2}x^{p+1} + x^2,$$
$$h(x) = x^{2p} + \overline{1}.$$

(a) Determinare, al variare di p, il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $g(x)$.
(b) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(g(x), h(x))$.