

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2024/25

Appello del 3 novembre 2025

1. Si considerino in S_{22} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14)(15, 16)(17, 18)(19, 20)(21, 22),$$

$$\tau = (1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9)(10, 12, 14, 11, 13)(15, 16, 17, 18)(19, 21, 20, 22).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{22} : $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
- (b) Dire se $C(\sigma) \cap C(\tau)$ è ciclico.
- (c) Dire se $C(\sigma)$ è abeliano.

2.

- (a) Determinare un omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{16}$ a $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$ la cui immagine abbia esattamente 8 elementi.
- (b) Determinare un omomorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{30}$ a $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12}$ la cui immagine non sia un gruppo ciclico.

3. Dato un numero primo p positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2+p} + x^{p^2-1} + x^{p^2-2p+1} + \overline{1},$$

$$g(x) = x^{p^3+p^2+p+1} - x^{p^3-p^2} - x^{p^2-p} - x^{p-1} + \overline{1},$$

$$h(x) = x^2 - \overline{2}x - \overline{3}.$$

- (a) Dire per quali p $f(x)$ e $g(x)$ hanno radici comuni in \mathbb{Z}_p , e determinarle.
- (b) Determinare, al variare di p , $\text{MCD}(f(x), h(x))$.