

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**  
**Algebra n.1**  
**Anno Accademico 2024/25**

**Appello del 3 novembre 2025**

1. Si considerino in  $S_{22}$  le seguenti permutazioni:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12, 13, 14)(15, 16)(17, 18)(19, 20)(21, 22), \\ \tau &= (1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9)(10, 12, 14, 11, 13)(15, 16, 17, 18)(19, 21, 20, 22).\end{aligned}$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di  $S_{22}$ :  $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$ .

- (a) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .
- (b) Dire se  $C(\sigma) \cap C(\tau)$  è ciclico.
- (c) Dire se  $C(\sigma)$  è abeliano.

2.

- (a) Determinare un omomorfismo di anelli da  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{16}$  a  $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8$  la cui immagine abbia esattamente 8 elementi.
- (b) Determinare un omomorfismo di gruppi da  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{30}$  a  $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12}$  la cui immagine non sia un gruppo ciclico.

3. Dato un numero primo  $p$  positivo, si considerino i seguenti polinomi di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= x^{p^2+p} + x^{p^2-1} + x^{p^2-2p+1} + \bar{1}, \\ g(x) &= x^{p^3+p^2+p+1} - x^{p^3-p^2} - x^{p^2-p} - x^{p-1} + \bar{1}, \\ h(x) &= x^2 - \bar{2}x - \bar{3}.\end{aligned}$$

- (a) Dire per quali  $p$   $f(x)$  e  $g(x)$  hanno radici comuni in  $\mathbb{Z}_p$ , e determinarle.
- (b) Determinare, al variare di  $p$ ,  $\text{MCD}(f(x), h(x))$ .