

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2024/25

Appello del 25 settembre 2025

1. Si considerino in S_{26} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12, 13)(14, 15, 16, 17, 18, 19, 20)(21, 22, 23)(24, 25, 26),$$

$$\tau = (1, 4, 3, 2)(5, 6, 7, 8)(9, 11, 13, 10, 12)(14, 20, 19, 18, 17, 16, 15)(21, 24, 22, 25, 23, 26).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{26} : $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{26} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
- (b) È vero che $C(\sigma) = C(\tau)$?
- (c) È vero che $C(\sigma)$ è abeliano?

2.

- (a) Determinare il numero degli omomorfismi di anelli da $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.
- (b) Dire se i gruppi delle unità $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12})$ e $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10})$ sono isomorfi.

3. Dato un numero primo p positivo, si consideri il seguente polinomio di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{2p^2} + x^{2p} + x^2 - \bar{1}.$$

- (a) Determinare, per $p = 11$, le radici di $f(x)$ in \mathbb{Z}_p .
- (b) Determinare, per $p = 397$, le radici di $f(x)$ in \mathbb{Z}_p .