

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**  
**Algebra n.1**  
**Anno Accademico 2024/25**

**Appello del 25 settembre 2025**

1. Si considerino in  $S_{26}$  le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12, 13)(14, 15, 16, 17, 18, 19, 20)(21, 22, 23)(24, 25, 26),$$

$$\tau = (1, 4, 3, 2)(5, 6, 7, 8)(9, 11, 13, 10, 12)(14, 20, 19, 18, 17, 16, 15)(21, 24, 22, 25, 23, 26).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di  $S_{26}$ :  $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{26} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$ .

- (a) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .
- (b) È vero che  $C(\sigma) = C(\tau)$ ?
- (c) È vero che  $C(\sigma)$  è abeliano?

2.

- (a) Determinare il numero degli omomorfismi di anelli da  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$  a  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ .
- (b) Dire se i gruppi delle unità  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12})$  e  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10})$  sono isomorfi.

3. Dato un numero primo  $p$  positivo, si consideri il seguente polinomio di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$f(x) = x^{2p^2} + x^{2p} + x^2 - 1.$$

- (a) Determinare, per  $p = 11$ , le radici di  $f(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ .
- (b) Determinare, per  $p = 397$ , le radici di  $f(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ .