

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2024/25

Appello del 10 settembre 2025

1. Si considerino in S_{24} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16, 17, 18, 19)(20, 21, 22, 23, 24),$$

$$\tau = (1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8)(9, 12, 11, 10)(13, 15, 17, 19, 14, 16, 18)(20, 21, 22)(23, 24).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{24} : $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{24} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

(b) Dire se $C(\sigma) \cap C(\tau)$ è un gruppo ciclico.

2.

(a) Determinare un omomorfismo di anelli non nullo da $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{10}$.

(b) Determinare un omomorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{10}$ il cui nucleo abbia ordine 12.

(c) Definire un omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{10}$ a $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$ la cui immagine abbia ordine 6.

3. Dato un numero primo p positivo, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^3+p^2+p} + x^2 + x + \bar{1},$$

$$g(x) = x^{p^3-p^2+p-1} + x - \bar{1}.$$

(a) Determinare, al variare di p , il numero delle radici di $f(x)$ in \mathbb{Z}_p .

(b) Determinare, al variare di p , le radici di $g(x)$ in \mathbb{Z}_p .