

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2024/25

Appello del 5 giugno 2025

1. Si considerino in S_{28} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1, 6, 11)(5, 10, 4)(9, 3, 8)(2, 7, 12)(13, 14, 15, 16, 17, 18, 19)(20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28),$$

$$\tau = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 17, 16, 18, 19)(20, 21, 23, 24, 26, 27)(22, 28, 25).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{28} : $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{28} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

(b) Determinare un sottogruppo di $C(\sigma) \cap C(\tau)$ avente ordine 12.

2.

(a) Determinare il numero degli omomorfismi di anelli da $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$.

(b) Determinare il numero degli omomorfismi di gruppi da $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$ a $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$.

(c) Siano p, q primi positivi distinti, e siano n, m numeri interi positivi. Determinare il numero dei sottogruppi di $\mathbb{Z}_{p^n} \times \mathbb{Z}_{q^m}$.

3. Dato un numero primo p maggiore di 2, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} + x^p + x - \bar{1},$$

$$g(x) = x^{p^5} + x^{p^4} + x^{p^2} - \bar{1},$$

$$h(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + x^2 + x - \bar{2}.$$

(a) Determinare, al variare di p , il resto e il quoziente della divisione euclidea di g per f .

(b) Determinare, al variare di p , $\text{MCD}(g, h)$.