CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2024/25

<u>Appello del 14 aprile 2025</u>

1. Si considerino in S_{23} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7)(8,9,10,11,12)(13,14,15,16,17,18,19)(20,21)(22,23)$$
$$\tau = (1,3,2)(4,7,6,5)(8,10,12,9,11)(13,16,19,15,18,14,17)(20,22)(21,23).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{23}: $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{23} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Determinare un sottogruppo non ciclico di $C(\sigma) \cap C(\tau)$ avente ordine 16.

2.

(a) Determinare il numero degli omomorfismi di gruppi da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{49}$ a $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{14}$.
(b) Determinare il numero degli omomorfismi di anelli da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{49}$ a $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{14}$.
(c) Determinare, se possibile, un omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{49}$ a $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{14}$ il cui nucleo abbia ordine 2.

3.

Dato un numero primo p maggiore di 2, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} + x^p + x - \overline{2},$$
$$g(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + x^p + \overline{13}.$$

(a) Determinare, al variare di p, il resto e il quoziente della divisione euclidea di g per f.
(b) Determinare, al variare di p, le radici in $\mathbb{Z}_p$ comuni a f e g.