CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2024/25

Appello del 10 febbraio 2025

1. Si considerino in S_{19} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2)(3,4,5)(6,7,8)(9,10)(11,12,13,14)(15,16,17,18,19)$$
$$\tau = (1,9,2,10)(3,5,4)(6,7,8)(11,14)(12,13)(15,17,19,16,18).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{19}: $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{19} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Determinare un sottogruppo di $C(\sigma)\cap C(\tau)$ non ciclico e di ordine pari.
(c) Provare che, se K è un sottogruppo di S_{19} tale che $\{\sigma,\tau\} \subset K$, allora K ha un sottogruppo non ciclico di ordine 4.

2.

(a) Dire se esiste un epimorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_9$, e, in caso affermativo, determinarlo.
(b) Dire se esiste un monomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$ a $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18}$, e, in caso affermativo, determinarlo.

3.

Dato un numero primo p maggiore di 2, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} + x^{2p} - x^p + \overline{1},$$
$$g(x) = x^{p+2} + x^p - x^2 - \overline{1},$$
$$h(x) = x^{3p} - x^{p-1} - \overline{1}.$$

(a) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f,g)$.
(b) Determinare, al variare di p, le radici in $\mathbb{Z}_p$ comuni a f e h.