CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2024/25

Appello del 27 gennaio 2025

1. Si considerino in S_{18} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8,9,10,11)(12,13,14,15,16,17,18)$$
$$\tau = (1,2)(3,5)(4,6)(7,9,8,10,11)(12,18,17,16,15,14,13).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{18}: $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{18} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Determinare un sottogruppo di $C(\sigma) \cap C(\tau)$ avente ordine 8.

2.

(a) Dire se esiste un sottoanello di $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{14}$ avente ordine 4 e dotato di elemento neutro del prodotto, e, in caso affermativo, determinarlo.
(b) Dire se esiste un epimorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$ a $\mathbb{Z}_6$, e, in caso affermativo, determinarlo.
(c) Determinare un omomorfismo di gruppi da $\mathbb{Z}_{60}$ a $\mathbb{Z}_{30}$ il cui nucleo abbia ordine 4.

3.

(a) Dati due numeri primi positivi distinti p, q, determinare il numero delle radici in $\mathbb{Z}_p$ del polinomio

$$f(x) = x^{pq} - \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x].$$

(b) Determinare il numero delle radici in $\mathbb{Z}_{101}$ del polinomio

$$g(x) = x^{101\cdot 25} + \overline{1} \in \mathbb{Z}_{101}[x].$$