

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2023/24**

**Appello del 7 novembre 2024**

1. Si consideri in  $S_{24}$  la seguente permutazione:

$$\sigma = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16, 17)(18, 19, 20, 21, 22, 23, 24).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di  $S_{24}$ :  $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{24} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$ .

- (a) Dire se  $C(\sigma)$  è commutativo.
- (b) Determinare un sottogruppo non ciclico di  $C(\sigma)$ .

2.

- (a) Dire se esiste un monomorfismo di anelli da  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  a  $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{40}$ , e, in caso affermativo, determinarlo.
- (b) Determinare un omomorfismo di gruppi additivi da  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}$  a  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18}$  la cui immagine abbia ordine 36.

3. Dato un numero primo  $p > 0$ , si considerino i seguenti polinomi di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$f(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + x^p + x - \bar{1},$$

$$g(x) = x^{p^3+p} + x^{p^2+p} + x^{2p} + x^2 - \bar{1}.$$

- (a) Determinare il quoziente ed il resto della divisione di  $f(x)$  per  $x - \bar{1}$ .
- (b) Determinare, al variare di  $p$ , il numero delle radici di  $g(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ .
- (c) Determinare l'insieme delle radici di  $g(x)$  per  $p = 2179$ .