

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2023/24

Appello del 7 novembre 2024

1. Si consideri in S_{24} la seguente permutazione:

$$\sigma = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16, 17)(18, 19, 20, 21, 22, 23, 24).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{24} : $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{24} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Dire se $C(\sigma)$ è commutativo.
- (b) Determinare un sottogruppo non ciclico di $C(\sigma)$.

2.

- (a) Dire se esiste un monomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{40}$, e, in caso affermativo, determinarlo.
- (b) Determinare un omomorfismo di gruppi additivi da $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{36}$ a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18}$ la cui immagine abbia ordine 36.

3. Dato un numero primo $p > 0$, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^3} + x^{p^2} + x^p + x - \bar{1},$$
$$g(x) = x^{p^3+p} + x^{p^2+p} + x^{2p} + x^2 - \bar{1}.$$

- (a) Determinare il quoziente ed il resto della divisione di $f(x)$ per $x - \bar{1}$.
- (b) Determinare, al variare di p , il numero delle radici di $g(x)$ in \mathbb{Z}_p .
- (c) Determinare l'insieme delle radici di $g(x)$ per $p = 2179$.