

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**  
**Algebra n.1**  
**Anno Accademico 2023/24**

**Appello dell'11 aprile 2024**

1. Siano date in  $S_{22}$  le permutazioni

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11)(12, 13, 14)(15, 16, 17, 18, 19)(20, 21, 22) \\ \tau &= (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10, 11, 12, 13)(14, 15, 16, 17, 18)(19, 20, 21, 22).\end{aligned}$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di  $S_{22}$ :

$$C(\sigma) = \{\alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}.$$

- (a) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .
- (b) Provare che  $C(\sigma) \cap C(\tau)$  non è banale.
- (c) Determinare un elemento di  $C(\sigma)$  avente periodo 24.

2.

- (a) Dire se esiste un monomorfismo di anelli da  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  a  $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{45}$ .
- (b) Determinare un monomorfismo di anelli da  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  a  $\mathbb{Z}_{30}$ .

3. Dato un numero primo  $p > 0$ , si considerino i seguenti polinomi di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= x^{2p-1} - x^p - x^{p-1} + \bar{1}, \\ g(x) &= x^{2p} - \bar{2}x^p + \bar{1}, \\ h(x) &= x^{p^2} + x^p + \bar{1}.\end{aligned}$$

- (a) Determinare, al variare di  $p$ ,  $\text{MCD}(f(x), g(x))$ .
- (b) Dire per quali  $p$  i polinomi  $f(x)$  e  $h(x)$  sono coprimi.