CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2023/24

<u>Appello del 9 febbraio 2024</u>

1. Sia data in S_{15} la permutazione

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12,13,14,15).$$

Si consideri inoltre il seguente sottogruppo di S_{15} :

$$C(\sigma) = \{\alpha \in S_{15} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}.$$

   (a) Determinare una permutazione $\tau \in S_{15}$ tale che $o(\tau) = 12$ e $C(\sigma) \cap \langle \tau \rangle \neq \{id\}$.

   (b) Dire se $C(\sigma)$ è abeliano.

   (c) Determinare un 15-ciclo $\gamma \in S_{15}$ tale che $\left|\langle \sigma \rangle \cap \langle \gamma \rangle\right| = 3$.

2.
   (a) Dimostrare che non esiste un monomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$.

   (b) Dimostrare che non esiste alcun epimorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_{16}$.

3. Dato un numero primo $p > 2$, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} + x^{p^2 - p} + \overline{1},$$
$$g(x) = x^{p^3 - p^2} + x^{p^2} + \overline{1},$$
$$h(x) = x^{p^3} + x^{p^2} - \overline{1}.$$

   (a) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.

   (b) Determinare, al variare di p, il quoziente e il resto della divisione di $h(x)$ per $g(x)$.