CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2023/24

Appello del 23 gennaio 2024

1. Siano date in S_{20} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12)(13,14,15)(16,17,18,19,20),$$
$$\tau = (1,3,2)(4,7,10,13,6,9,12,15,5,8,11,14)(16,20,19,18,17).$$

Si considerino inoltre i seguenti sottogruppi di S_{20}:
$C(\sigma) = \{\alpha \in S_{20} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$, e $C(\tau)$, definito in modo analogo.

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
(b) Dire se $C(\sigma)$ è abeliano.
(c) Dire se $C(\tau)$ è ciclico.

2.
(a) Determinare un omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{15}$ a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ il cui nucleo abbia ordine 15.
(b) Determinare un monomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{21}$.

3. Dato un numero primo positivo p, ed un intero positivo n, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^{p^i} + \bar{1},$$
$$g(x) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i.$$

(a) Determinare, al variare di p ed n, l'insieme delle radici di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_p$.
(b) Per $n = p^2$, determinare, al variare di p, $\text{MCD}(f(x), g(x))$.