CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2023/24

<u>Appello dell'8 gennaio 2024</u>

1. Siano date in S_{22} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12,13,14)(15,16)(17,18)(19,20,21,22),$$
$$\tau = (1,4,7,2,5,8,3,6,9)(10,12,11,13,14)(15,18,16,17)(19,21)(20,22).$$

   (a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

   (b) Determinare un sottogruppo H di S_{22} avente ordine 24 e tale che ogni suo elemento commuti con entrambe σ e τ.

   (c) Provare che in ogni sottogruppo di S_{22} contenente $\{\sigma,\tau\}$ si trovano 3 elementi di periodo 2.

2.

   (a) Determinare un omomorfismo di anelli non banale da $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_{12}$.

   (b) Determinare un omomorfismo di anelli da $\mathbb{Z}_{12}$ a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ il cui nucleo abbia ordine 3.

3. Dato un numero primo positivo p, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^2} - x^p + x^2 - \bar{2}x + \bar{1},$$
$$g(x) = x^p - \bar{1},$$
$$h(x) = (x+\bar{1})^2.$$

   (a) Determinare, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.

   (b) Determinare, al variare di p, il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $h(x)$.