

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

**Algebra n.1**

**Anno Accademico 2022/23**

**Appello dell'8 novembre 2023**

1. Siano date in  $S_{24}$  le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12, 13)(14, 15, 16, 17, 18, 19)(20, 21, 22, 23, 24),$$

$$\tau = (1, 3, 2)(4, 6, 5)(7, 8, 9)(10, 13, 12, 11)(14, 19, 16, 15, 18, 17)(20, 24, 23, 22, 21).$$

(a) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .

(b) Determinare l'insieme degli elementi di  $\langle \sigma \rangle$  che commutano con  $\tau$ .

2.

(a) Dire se esiste un omomorfismo di gruppi surgettivo da  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{25}$  a  $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$ .

(b) Determinare un omomorfismo di gruppi da  $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{10}$  a  $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{30}$  la cui immagine sia un gruppo ciclico di ordine 60.

(c) Dire se esiste un omomorfismo di anelli iniettivo da  $\mathbb{Z}_{12}$  a  $\mathbb{Z}_{24}$ .

3. Dato un numero primo positivo  $p$ , si considerino i seguenti polinomi di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$f(x) = x^{p^2} + x^p + x + \bar{1},$$

$$g(x) = \bar{7}x^{p^2} + \bar{5}x^p + \bar{3}x + \bar{2},$$

$$h(x) = \bar{2}x^{p^2} + x^p + \bar{1}.$$

(a) Determinare, al variare di  $p$ , il numero delle radici comuni a  $f(x)$  e  $g(x)$  in  $\mathbb{Z}_p$ .

(b) Determinare tutti i fattori lineari di  $f(x) - h(x)$  in  $\mathbb{Z}_p[x]$ .