

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2022/23

Appello del 26 settembre 2023

1. Siano date in S_{21} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8)(9, 10, 11)(12, 13, 14, 15, 16, 17)(18, 19)(20, 21),$$

$$\tau = (1, 3, 2, 4, 5)(6, 9, 7, 10, 8, 11)(12, 15)(13, 16)(14, 17)(18, 20)(19, 21).$$

(a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

(b) Determinare il più piccolo intero positivo k tale che σ^k commuti con τ^k .

2.

(a) Dire se esiste un omomorfismo di gruppi iniettivo da \mathbb{Z}_4 a $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$.

(b) Dire se esiste un omomorfismo di gruppi surgettivo da \mathbb{Z}_{120} a $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$.

(c) Dire se esiste un omomorfismo di gruppi non nullo da \mathbb{Z}_8 a $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$.

3. Dato un numero primo $p > 3$, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{4p^5} + x^{2p^3} + \bar{1},$$

$$g(x) = x^{6p} - \bar{1}.$$

(a) Determinare, al variare di p , il numero delle radici di $f(x)$ in \mathbb{Z}_p .

(b) Determinare, al variare di p , il numero delle radici di $g(x)$ in \mathbb{Z}_p .