CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2022/23

Appello del 13 settembre 2023

1. Siano date in S_{21} le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12)(13,14,15,16,17)(18,19)(20,21),$$
$$\tau = (1,4,2,5,3,6)(7,10,8,12,9,11)(13,15,14,16,17)(18,19,20,21).$$

Si consideri, inoltre, $C(\sigma) = \left\{ \alpha \in S_{21} \middle| \alpha\sigma = \sigma\alpha \right\}$.

(a) Determinare $C(\sigma) \cap \langle \tau \rangle$.
(b) Provare che $C(\tau)$ ha un sottogruppo di ordine 240.

2. Dati gli interi n, m maggiori di 1, sia $\varphi : \mathbb{Z}_{nm} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ l'applicazione definita ponendo, per ogni $a \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi([a]_{nm}) = ([ma]_n, [na]_m) .$$

(a) Determinare $|\operatorname{Im}\varphi|$.
(b) Determinare $|\varphi^{-1}([0]_n, [0]_m)|$.
(c) Per $n = 3, m = 11$, dire se l'applicazione φ è invertibile, e in caso affermativo determinare φ^{-1}.

3. Dato un numero primo $p > 3$, si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^5} + x^{p^4} + x^{p^3} + x^{p^2} + x^2 - x - \bar{1},$$
$$g(x) = x^{p^5} + x^{p^4} + x^{p^3} + x^{p^2} + x - \bar{2},$$
$$h(x) = x^{p^4} + x^{p^3} + x^{p^2} + x^p + x + \bar{1}.$$

(a) Determinare $\operatorname{MCD}(f(x), g(x))$.
(b) Determinare il resto della divisione euclidea di $f(x)$ per $h(x)$.