

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2022/23

Appello del 3 luglio 2023

1. Siano date, in S_{22} , le permutazioni

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8, 9, 10, 11)(12, 13, 14, 15)(16, 17, 18, 19, 20, 21, 22), \\ \tau &= (1, 3)(2, 4)(5, 6)(7, 9, 8, 10, 11)(12, 14, 13, 15)(16, 22, 21, 20, 19, 18, 17).\end{aligned}$$

Si consideri, inoltre, il sottogruppo $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$.

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
- (b) Provare che $C(\sigma) \cap C(\tau)$ contiene un sottogruppo di ordine 56.
- (c) Dire se $C(\sigma) \cap C(\tau)$ è un gruppo ciclico.

2. Data una coppia (m, n) di interi maggiori di 1, si consideri l'applicazione

$$\varphi: \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{m^2} \times \mathbb{Z}_{n^2},$$

tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_m, [b]_n) = ([mna]_{m^2}, [mnb]_{n^2})$.

- (a) Al variare di m ed n , determinare $|\text{Im } \varphi|$.
- (b) Determinare l'insieme delle coppie (m, n) per le quali φ è iniettiva.

3. Sia p un numero primo maggiore di 2.

- (a) Determinare un massimo comune divisore dei seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_p[x]$:

$$f(x) = x^{p^3+p^2} + x^{p^3} + x^{p^3-p^2} - \bar{1}, \quad g(x) = x^{2p^2} - \bar{1}.$$

- (b) Per $p = 137$, determinare il resto della divisione euclidea in $\mathbb{Z}_p[x]$ di

$$a(x) = x^{p^4+p^3+p^2} + x^{p^4} + x^{p^4-p^3} - \bar{1} \quad \text{per} \quad b(x) = x^{2p^2} + \bar{1}.$$