

# CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

## Algebra n.1

Anno Accademico 2022/23

Appello del 3 luglio 2023

1. Siano date, in  $S_{22}$ , le permutazioni

$$\sigma = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8, 9, 10, 11)(12, 13, 14, 15)(16, 17, 18, 19, 20, 21, 22),$$

$$\tau = (1, 3)(2, 4)(5, 6)(7, 9, 8, 10, 11)(12, 14, 13, 15)(16, 22, 21, 20, 19, 18, 17).$$

Si consideri, inoltre, il sottogruppo  $C(\sigma) = \{\alpha \in S_{22} \mid \alpha\sigma = \sigma\alpha\}$ .

- (a) Determinare  $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$ .
- (b) Provare che  $C(\sigma) \cap C(\tau)$  contiene un sottogruppo di ordine 56.
- (c) Dire se  $C(\sigma) \cap C(\tau)$  è un gruppo ciclico.

2. Data una coppia  $(m, n)$  di interi maggiori di 1, si consideri l'applicazione

$$\varphi: \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{m^2} \times \mathbb{Z}_{n^2},$$

tale che, per ogni  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi([a]_m, [b]_n) = ([mna]_{m^2}, [mn b]_{n^2})$ .

- (a) Al variare di  $m$  ed  $n$ , determinare  $|\text{Im } \varphi|$ .
- (b) Determinare l'insieme delle coppie  $(m, n)$  per le quali  $\varphi$  è iniettiva.

3. Sia  $p$  un numero primo maggiore di 2.

- (a) Determinare un massimo comune divisore dei seguenti polinomi di  $\mathbb{Z}_p[x]$ :

$$f(x) = x^{p^3+p^2} + x^{p^3} + x^{p^3-p^2} - \bar{1}, \quad g(x) = x^{2p^2} - \bar{1}.$$

- (b) Per  $p = 137$ , determinare il resto della divisione euclidea in  $\mathbb{Z}_p[x]$  di

$$a(x) = x^{p^4+p^3+p^2} + x^{p^4} + x^{p^4-p^3} - \bar{1} \quad \text{per} \quad b(x) = x^{2p^2} + \bar{1}.$$